

3 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы и законы

3.1 Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2$$

3.2 Момент инерции тела относительно его оси вращения

$$J = \int_V \rho r^2 dV$$

3.3 Теорема Штейнера

$$J = J_0 + ma^2$$

3.4 Таблица моментов инерции

| ТЕЛО | ОСЬ ВРАЩЕНИЯ ПРОХОДИТ | МОМЕНТ ИНЕРЦИИ |
|---------------------------------------|---|----------------------|
| Однородный тонкий стержень длиной l | Через центр тяжести перпендикулярно длине | $ml^2/12$ |
| Сплошной цилиндр | Через ось цилиндра | $mR^2/2$ |
| Полый цилиндр | Через ось цилиндра | $m(R_1^2 + R_2^2)/2$ |
| Полый тонкий цилиндр | Через ось цилиндра | mR^2 |
| Однородный шар | По диаметру | $2mR^2/5$ |

3.5 Момент силы относительно оси вращения

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad M = rF \sin \alpha = F \cdot l$$

3.6 Основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$$

3.7 Если $J = const$, то

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$$

3.8 Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$$

3.9 Закон сохранения момента импульса в замкнутой системе

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n J_i \vec{\omega}_i = const$$

3.10 Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $B = 0,2 \text{ рад/с}^3$. Определить вращающий момент, действующий на стержень через 2с после начала вращения, если момент инерции стержня $0,048 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Решение.

| | | |
|---------------------------------------|---|--|
| $B = 0,2 \text{ рад/с}^3$ | Согласно основному уравнению динамики вращательного движения | $M = J \cdot \varepsilon$ (1) |
| $t = 2\text{с}$ | | |
| $J = 0,048 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ | Найдем угловую скорость вращения как первую производную от угла поворота по времени | $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A + 3Bt^2$ |
| $M - ?$ | | |

Угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Bt \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим $M = 6 \cdot J B t$

Анализ единиц: $[M] = \text{кг}\cdot\text{м}^2 \cdot (\text{рад/с}^3) \cdot \text{с} = \text{Н}\cdot\text{м}$.

Вычисления: $M = 0,048 \cdot 6 \cdot 0,2 \cdot 2 = 0,115 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Ответ: $M = 0,115 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Задача 2. По горизонтальной плоской поверхности катится диск со скоростью 8м/с . Определить коэффициент трения, если диск, предоставленный самому себе, остановился, пройдя 18м .

Решение.

| | |
|-------------------|---|
| $v = 8\text{м/с}$ | Согласно закону сохранения энергии работа по преодолению трения совершается за счет кинетической энергии поступательного и вращательного движения диска |
| $S = 18\text{м}$ | |
| $k - ?$ | $F_{\text{тр}} \cdot S = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ |

Учтя, что $F_{\text{тр}} = kmg$, $\omega = \frac{v}{R}$, $J = \frac{mR^2}{2}$,

получим $kmg \cdot S = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} mv^2$,

откуда $k = \frac{3v^2}{4gS}$

Анализ единиц: $[k]=\left[\frac{\frac{M^2}{C^2}}{\frac{M}{C^2} \cdot M}\right]=1$. Вычисления: $k=\frac{3 \cdot 64}{4 \cdot 9,8 \cdot 18}=0,27$.

Ответ: $k=0,27$

Задача 3. На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1=8\text{мин}^{-1}$, стоит человек массой 70кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2=10\text{мин}^{-1}$. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение.

| | |
|---|---|
| $n_1=8\text{мин}^{-1}$ $m_1=70\text{кг}$ $n_2=10\text{мин}^{-1}$ $m_2=?$ | Согласно закону сохранения момента импульса: $L_1=L_2$ где $L_1=J_1\omega_1=J_12\pi n_1$ - момент импульса системы, когда человек стоит на краю платформы; $L_2=J_2\omega_2=J_22\pi n_2$ - момент импульса системы, когда человек стоит в центре платформы. |
|---|---|

Учтя, что $J_1=J_0+m_1R^2=\frac{m_2R^2}{2}+m_1R^2$, $J_2=J_0=\frac{m_2R^2}{2}$

(где $J_0=\frac{m_2R^2}{2}$ - момент инерции платформы), т.к. $J_12\pi n_1=J_22\pi n_2$

получим $\frac{R^2(2m_1+m_2)2\pi \cdot n_1}{2}=\frac{m_2R^2 \cdot 2\pi \cdot n_2}{2}$, или $2m_1 \cdot n_1+m_2 \cdot n_1=m_2 \cdot n_2$,

откуда $m_2=\frac{2m_1 \cdot n_1}{n_2-n_1}$

Анализ единиц: $[m]=\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{с}^{-1}}=\text{кг}$. Вычисления: $m_2=\frac{2 \cdot 70 \cdot 8}{2}=560\text{кг}$.

Ответ: $m_2=560\text{кг}$

Задача 4. Блок, имеющий форму диска массой 0,4кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами 0,3кг и 0,7кг. Определить силы натяжения нити на обе стороны блока.

Решение.

| | |
|---|---|
| $m=0,4\text{кг}$ $m_1=0,3\text{кг}$ $m_2=0,7\text{кг}$ $T_1=? T_2=?$ | На первый груз действуют: сила тяжести m_1g и сила натяжения нити T_1 . Запишем уравнение движения в векторной форме $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$ и спроецируем на ось y , направленную вверх, как и ускорение a : $T_1-m_1g=m_1a$ (1) |
|---|---|

Уравнение движения второго груза:

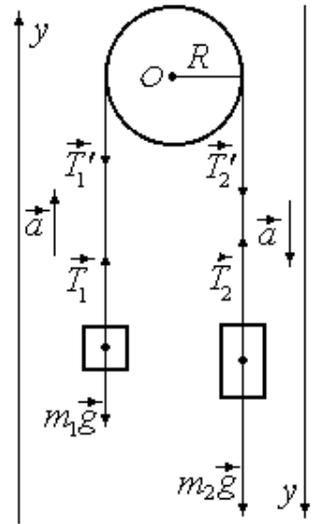
$$m_2 \vec{g} + \vec{T} = m_2 \vec{a} \quad \text{или} \quad m_2 g - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

Под действием двух моментов сил $T_1'R$ и $T_2'R$ относительно горизонтальной оси О блок приобретет угловое ускорение ε . Согласно основному уравнению динамики вращательного движения $T_2'R - T_1'R = J\varepsilon$

$$\text{или} \quad R(T_2' - T_1') = J\varepsilon \quad (3)$$

где $\varepsilon = \frac{a}{R}$; $J = \frac{mR^2}{2}$

По третьему закону Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$, $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, поэтому $T_2' - T_1' = T_2 - T_1$.



Сложим уравнения (1) и (2) и получим

$$T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в уравнение (3): $R[(m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a] = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R}$,

найдем $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_2 + m_1 + \frac{m}{2})}$; $T_1 = m_1(g + a)$; $T_2 = m_2(g - a)$

Анализ единиц: $[a] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{кг}} \right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $[T] = \left[\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] = \text{Н}$

Вычисления: $a = \frac{(0,7 - 0,3) \cdot 9,8}{(0,3 + 0,7 + 0,4/2)} = 3,26 \text{ м/с}^2$.

$$T_1 = 0,3 \cdot (9,8 + 3,26) = 3,92 \text{ Н}; \quad T_2 = 0,7 \cdot (9,8 - 3,26) = 4,58 \text{ Н}$$

Ответ: $a = 3,26 \text{ м/с}^2$; $T_1 = 3,92 \text{ Н}$; $T_2 = 4,58 \text{ Н}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1 Основные физические постоянные

| Физические постоянные | Обозначение | Значение |
|---|--------------|--|
| Нормальное ускорение свободного падения | g | $9,81\text{ м/с}^2$ |
| Гравитационная постоянная | G | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ |
| Постоянная Авогадро | N_A | $6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ |
| Молярная газовая постоянная | R | $8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ |
| Постоянная Больцмана | k | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ |
| Элементарный заряд | e | $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ |
| Скорость света в вакууме | c | $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ |
| Электрическая постоянная | ϵ_0 | $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ |
| Магнитная постоянная | μ_0 | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ |
| Постоянная Стефана-Больцмана | σ | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ |
| Постоянная Вина | b | $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ |
| | c | $1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ |
| Постоянная Планка | h | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ |
| | \hbar | $1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ |
| Постоянная Ридберга | R | $3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ |
| | R' | $1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ |
| Боровский радиус | a_0 | $0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ |
| Комптоновская длина волны электрона | λ_c | $2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ |
| Энергия ионизации атома водорода | E_i | $2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 эВ) |
| Атомная единица массы | 1 а.е.м. | $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ |
| Масса покоя электрона | m_e | $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ (0,00055 а.е.м.) |
| Масса покоя протона | m_p | $1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (1,00728 а.е.м.) |
| Масса покоя нейтрона | m_n | $1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (1,00867 а.е.м.) |
| Масса покоя α -частиц | m_α | $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (4,00149 а.е.м.) |

Таблица А2 Соотношение между внесистемными единицами и единицами СИ

$1 \text{ л} = 10^{-3} \text{ м}^3$ $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ $1 \text{ мм.рт.ст.} = 133 \text{ Па}$
 $1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$

Таблица А3 Молярная масса, эффективный диаметр молекул некоторых газов

| Газ | $\mu \cdot 10^{-3}$, кг/моль | $d \cdot 10^{-10}$, м | Газ | $\mu \cdot 10^{-3}$, кг/моль | $d \cdot 10^{-10}$, м |
|----------|----------------------------------|------------------------|----------------|----------------------------------|------------------------|
| Водород | 2 | 2,3 | Аргон | 40 | 3,5 |
| Гелий | 4 | 1,9 | Воздух | 29 | 2,7 |
| Азот | 28 | 3,0 | Углекислый газ | 44 | |
| Кислород | 32 | 2,7 | Пары воды | 18 | 3,0 |
| Неон | 20 | | | | |

Таблица А4 Диэлектрическая проницаемость

| Вещество | Проницаемость ϵ | Вещество | Проницаемость ϵ |
|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|
| Вода | 81 | Слюда | 7 |
| Парафин | 2 | Кварц | 4,5 |
| Стекло | 7 | Воск | 3 |

Таблица А5 Удельное сопротивление металлов

| Металл | Удельное сопротивление, Ом·м | Металл | Удельное сопротивление, Ом·м |
|--------|---------------------------------|----------|---------------------------------|
| Медь | $1,7 \cdot 10^{-8}$ | Алюминий | $2,53 \cdot 10^{-8}$ |
| Железо | $9,8 \cdot 10^{-8}$ | Серебро | $1,6 \cdot 10^{-8}$ |
| Нихром | $1,1 \cdot 10^{-6}$ | Свинец | $2,2 \cdot 10^{-8}$ |

Таблица А6 Показатель преломления

| Вещество | Показатель | Вещество | Показатель |
|----------|------------|----------|------------|
| Алмаз | 2,42 | Глицерин | 1,44 |
| Вода | 1,33 | Стекло | 1,50 |

Таблица А7 Работа выхода электронов

| Металл | $A \cdot 10^{-19}$ Дж | A , эВ | Металл | $A \cdot 10^{-19}$ Дж | A , эВ |
|----------|-----------------------|----------|---------|-----------------------|----------|
| Вольфрам | 7,2 | 4,5 | Рубидий | 3,4 | 2,1 |
| Калий | 3,5 | 2,2 | Серебро | 4,7 | 7,5 |
| Литий | 3,7 | 2,3 | Цезий | 3,2 | 2,0 |
| Натрий | 4,0 | 2,5 | Цинк | 6,4 | 4,0 |
| Платина | 10,1 | 6,3 | | | |

Таблица А8 Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименование

| Приставка | | Множитель | Приставка | | Множитель |
|--------------|-------------|-----------|--------------|-------------|------------|
| Наименование | Обозначение | | Наименование | Обозначение | |
| Гига | Г | 10^9 | деци | д | 10^{-1} |
| Мега | М | 10^6 | санتي | с | 10^{-2} |
| Кило | к | 10^3 | милли | м | 10^{-3} |
| | | | микро | мк | 10^{-6} |
| | | | нано | н | 10^{-9} |
| | | | пико | п | 10^{-12} |